Correction bac maths 2018 ES

Exercice 1

Notions abordées : probabilités, loi normale, intervalle de fluctuation

Partie A

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart type $\sigma = 12$.
1a) $P(X = 10) = 0$ car pour une loi à densité la probabilité que X prenne une valeur précise est nulle.
b) $P(X \geq 45) = 0.5$ car pour une loi normale on sait que $P(X \geq \mu) = 0.5$.
c) $P(21 \leq X \leq 69) = p(X - 2\sigma \leq X \leq X + 2\sigma) \approx 0.95$
d) $P(21 \leq X \leq 45) = P(45 \leq X \leq 69) = \frac{1}{2}P(21 \leq X \leq 69) \approx 0.475$

2) On utilise la calculette pour calculer $p(30 \leq X \leq 60) \approx 0.789$

3) On cherche la valeur de a telle que $P(X \leq a) = 0.3$. On utilise la calculette, plus précisant la fonction inverse d'une loi normale et on obtient $a = 39$. Cela veut dire qu'il y a une probabilité de 30 pourcents que le client passe moins de 39 minutes dans le magasin.

Partie B

1) Vérifions que l'on peut appliquer le théorème du cours sur les intervalles de fluctuations
- $n = 300 \geq 30$
- $np = 267 \geq 5$
- $n(1-p) = 33 \geq 5$

On peut donc appliquer le théorème du cours qui nous dit qu'un intervalle de fluactuation à 95 pourcents est donné par :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \ ; \ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

.
On en déduit que l'intervalle demandé est $I \approx [0.854; 0.925]$

2) La fréquence de clients satisfaits est donnée par $f = \frac{286}{300} \approx 0.95$

3) La fréquence trouvée à la question 2 n'appartient pas à l'intervalle trouvé à la question 1. Donc on ne peut pas affirmer que au seuil de 95 pourcents, le taux de satisfaction des clients est resté stable entre 2013 et 2018.

Exercice 2

Notions abordées : probabilités, arbre de probabilités, analyse de fonctions

Partie A

1) La probabilité $p_{\overline{F}}(S)$ est la probabilité de l'événement S sachant $\overline{F}$. C'est donc la probabilité que l'élève soit inscrit dans un club de sport sachant que ce n'est pas une fille.

Réponse a.

2) On applique la formule du cours $p_F(S) = \frac{p(F \cap S)}{p(F)} = \frac{0.3 \times 0.4}{0.47} = \frac{0.12}{0.47} \approx 0.255$

Réponse b

Astuce : La probabilité de l'intersection est donnée par l'arbre. Il suffit de regarder la branche qui passe par S et F et de faire le produit des probabilités présentes sur la branche

.

Partie B

Méthodologie : L'équation de la tangente à une courbe au point a est donnée par l'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

1) On a $g(a) = -(1)^3 + 3 \times (1)^2 - 1 = -1 + 3 - 1 = 1$
g est dérivable sur son domaine de définition en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
$g'(x) = -3x^2 + 6x$
Donc $g'(1) = 3$

On en déduit que l'équation de la tangente est $y = 3(x-1) + 1 = 3x - 2$

Réponse b

2) *Méthodologie :* La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est donné par $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Une primitive de la fonction G est donnée par $G(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x$ La valeur moyenne d'une fonction est donnée par

$$\begin{array}{rcl} m_a & = & \frac{1}{a-(-1)} \int_{-1}^{a} g(x)dx \\ & = & \frac{1}{a+1}(G(a) - G(-1)) \\ & = & \frac{1}{a+1}(\frac{-a^4}{4} + a^3 + \frac{1}{4}) \end{array}$$

On évalue l'expression avec les valeurs de a proposées par l'énoncé et on trouve que cette expression vaut 0 pour $a = 1$

Réponse b

Exercice 3

1a) Le niveau au deuxième jour correspond à $u_1 = 1.06u_0 - 15 = 626.3cm$.

1b) Chaque jour il y une augmentation de 6 pourcents cela revient à multiplier u_n par 1.06 puis il y a une baisse de 15 cm.
On peut donc en déduire que $u_{n+1} = 1.06u_n - 15$.

2)a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $v_n = u_n - 250$

Méthodologie : Pour montrer qu'une suite est géométrique on calcule v_{n+1} et on essaye de montrer qu'on peut écrire $v_{n+1} = q * v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 250 \\ &= 1.06u_n - 15 - 250 \\ &= 1.06u_n - 265 \\ &= 1.06(u_n - 250) \\ &= 1.06v_n \end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 1.06 et de premier terme $v_0 = 355$

2b) *Méthodologie :* Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q alors $u_n = u_0q^n$

On a donc $v_n = 355 * 1.06^n$
$v_n = u_n - 250$
Donc $u_n - 250 = 355 * 1.06^n$
Donc $u_n = 355 * 1.06^n + 250$

3a) Puisque $1.06 > 1$, $lim_{n \to =\infty} 1.06^n = +\infty$
Donc$lim_{n \to =\infty} u_n = +\infty$

3b) La suite (u_n) tend vers l'infinie et au départ le niveau de l'eau est inférieur à 10 mètres, il existe donc un jour ou le niveau sera supérieur à 10 mètres et les techniciens devront intervenir.

4a) On cherche à calculer au bout de combien de jours le niveau sera supérieur à 10m. On rajoute donc les 2 instructions suivantes :
- tant que U<1000
- u <- 1.06*U-15

4b) On rentre le programme sur la calculette, on le lance et on obtient N=13.

4c) Les techniciens devront intervenir au bout de 13 jours c'est à dire le 14 janvier.

Exercice 4

Notions abordées : étude de fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3$

1) f est dérivable sur son domaine de définition en tant que somme et composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in [-2;4], f'(x) = 2e^{-2x} + (2x+1) \times (-2)e^{-2x}$$
$$= 2e^{-2x} - 4xe^{-2x} - 2e^{-2x}$$
$$= -4xe^{-2x}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
On en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]0;4[$ donc f est croissante sur cet intervalle.
On en déduit que $f'(x) < 0$ sur $]-2;0[$ donc f est décroissante sur cet intervalle.

3) f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-2,0[$. $f(-2) \approx -161$ et $f(2)4$.
Donc d'après le théorème de la bijection il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle.
A la calculette on trouve $\alpha \approx 0.8$

4a)On admet que sur $[-2;4]$, $f''(x) = (8x-4)e^{-2x}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
Donc le signe de f" dépend uniquement de l'expression entre parenthèse f" est négative sur $[-2, 0.5]$, s'annule en 0.5 et est positive sur $[0.5;4]$.

4b) D'après la question précédente on en déduit que le plus grand intervalle sur lequel f est convexe est $[0.5, 4]$.

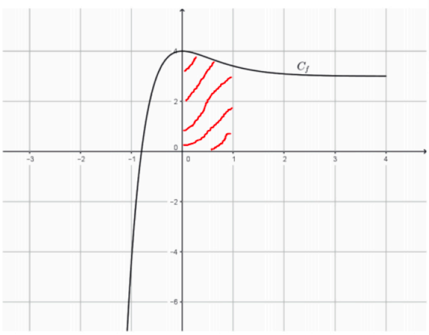
5a) G est dérivable sur $[-2;4]$.
$$\begin{aligned}\forall x \in [-2;4], G'(x) &= -e^{-2x} + (-x-1) \times (-2)e^{-2x} \\ &= -e^{-2x} + 2xe^{-2x} + 2e^{-2x} \\ &= (2x+1)e^{-2x} \\ &= g(x)\end{aligned}$$
Donc G est bien une primitive de g sur cet intervalle.

5b) Puisque $f(x) = g(x) + 3$ sur l'intervalle $[-2;4]$, on en déduit qu'une primitive de f est $F(x) = G(x) + 3x$

6a)

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 4 – Commun à tous les candidats



6b) On peut lire $3 < A < 4ua$.

6c)

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\
&= F(1) - F(0) \\
&= -2\mathrm{e}^{-2} + 3 + 1 \\
&= 4 - 2\mathrm{e}^{-2} \\
&\approx 3,73\text{u.a}
\end{aligned}$$