Correction bac maths 2019 ES

Exercice 1

Notions abordées : probabilités

Il s'agit de savoir si 4 affirmations sont vraies ou fausses.

1. On cherche à calculer $P(\overline{R}|S)$.

$P(\overline{R}|S) = \frac{P(\overline{R}\cap S)}{P(S)}$

Astuce : Pour calculer la probabilité d'une issue comme ici P(S), il suffit de sommer les probabilités des branches qui se terminent par S. C' est la formule des probabilités totales.

Ici, on a 2 branches qui se terminent par S. En appliquant la formule des probabilités totales on a donc

$$\begin{aligned} P(S) &= P(R\cap S) + P(\overline{R}\cap S) \\ &= 0.2\times 0.3 + 0.7\times 0.4 \\ &= 0.06 + 0.28 \\ &= 0.34 \end{aligned}$$

Donc $P(\overline{R}|S) = \frac{P(0.06)}{P(0.34)} \approx 0.18$.

Donc l'affirmation est FAUSSE.

2. On sait que l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a,b]$ est donnée par $E[X] = \frac{a+b}{2}$.
On doit donc résoudre $\frac{x+18}{2} = 12$.

$$\begin{aligned} & \frac{x+18}{2} = 12 \\ \iff & x + 18 = 24 \\ \iff & x = 6 \end{aligned}$$

Donc l'affirmation est FAUSSE.

3. On a l'équation $\ln(x^2) - \ln(\frac{x^5}{e}) + \ln(2) = \ln(2x) + 5$

Astuce : On simplifie l'équation en utilisant les propriétés du logarithme :
$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
$\ln(a^n) = n\ln(a)$
$\ln(e) = 1$

$$\begin{aligned}
& \ln(x^2) - \ln(\tfrac{x^5}{e}) + \ln(2) = \ln(2x) + 5 \\
\iff\ & 2\ln(x) - 5\ln(x) + \ln(e) + ln(2) = \ln(2) + \ln(x) + 5 \\
\iff\ & -4\ln(x) + \ln(e) = 5 \\
\iff\ & -4\ln(x) + 1 = 5 \\
\iff\ & \ln(x) = -1 \\
\iff\ & x = \tfrac{1}{e}
\end{aligned}$$

Donc l'affirmation est VRAIE.

4. Il y a une tangente parallèle à l'axe des abscisses lorsque la dérivée, c'est à dire f' s'annule. La fonction f' est continue et décroissante sur l'intervalle $[0, 5]$ à valeurs dans l'intervalle $[30, -5]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une valeur de x pour laquelle f' s'annule sur l'intervalle $[0, 5]$. On applique le même raisonnement sur l'intervalle $[5, 15]$.
On en déduit qu'il y a au moins 2 tangentes horizontales.
Donc l'affirmation est FAUSSE.

5. C'est uniquement l'application d'une propriété du cours, une fonction est convexe sur I si et seulement si sa dérivée est croissante sur ce même intervalle.

Ici la fonction f' est croissante sur $[5, 15]$.
Donc la fonction f est convexe sur $[5, 15]$.
Donc l'affirmation est VRAIE.

Exercice 2

Notions abordées : probabilités, algorithmique. Comme beaucoup d'exercices de probabilité, cet exercice est très simple si on prend le temps de bien lire l'énoncé et qu'on sait utiliser sa calculette.

1a) La suite (u_n) représente l'évolution du nombre de pommiers de Laurence.
Prenons l'année n, on a alors u_n pommiers.
On sait que lorsqu'on passe à l'année $n+1$, Laurence plante 22 nouveaux pommiers par hectare.
De plus, elle élimine 4 pourcents de pommiers existants, ce qui revient à en conserver 96 pourcents, ce qui correspond à avoir $0.96u_n$ pommiers.
On a donc $u_{n+1} = 0.96u_n + 22$.

1b) On applique la formule de la question précédente.
On a $u_0 = 300$ pommiers pour 2018.
En 2019, $u_1 = 0.96 \times 300 + 22 = 310$ pommiers.
En 2020, $u_2 = 0.96 \times 310 + 22 = 319.6$ arrondi à 320 pommiers.

2.a) Il suffit de compléter l'algorithme avec la condition d'arret qui correspond à U devient plus grand que 400 et la mise à jour de U avec la formule de la question 1a. On ajoute donc les lignes :

- tant que U<400
- U <- 0.96U+22

2b) En rentrant ce programme dans la calculette on trouve que $N = 13$.
Il faut donc attendre 2031.

3a. on définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 550$

$$\begin{aligned} v_n &= u_n - 550 \\ \text{Donc, } v_{n+1} &= u_{n+1} - 550 \\ &= 0.96u_n + 22 - 550 \\ &= 0.96u_n - 528 \\ &= 0.96(u_n - 550) \\ &= 0.96v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0.96 et de premier terme $v_0 = u_0 - 550 = 300 - 550 = -250$.

3b. On applique la formule du cours qui donne l'expression d'un terme d'un suite géométrique.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n = -250 \times 0.96^n$.

Il suffit ensuite de combiner les résultats précédentes.
On a $v_n = u_n - 550$
et $v_n = -250 \times 0.96^n$
.

$$\begin{aligned} u_n - 550 &= -250 \times 0.96^n \\ \iff u_n &= 550 - 250 \times 0.96^n \end{aligned}$$

3c. Le nombre de pommiers en 2025 correspond à $u_{2025-2018} = u_7$.
On applique la formule de la question précédente.
$u_7 = 550 - 250 \times 0.96^7 \approx 362$

3.d On résout $u_n > 400$.

$$\begin{aligned} & u_n > 400 \\ \iff & 550 - 250 \times 0.96^n > 400 \\ \iff & -250 \times 0.96^n > 150 \\ \iff & 0.96^n < \frac{-150}{250} \\ \iff & 0.96^n < \frac{-3}{5} \\ \iff & n \ln(0.96) < \ln(0.6) \\ \iff & n > \frac{\ln(0.6)}{ln(0.96)} \\ \iff & n > 12 \end{aligned}$$

On retrouve bien le $N = 13$ de la question 2b.

Exercice 3

Notions abordées : probabilités, algorithmique. Comme beaucoup d'exercices de probabilité, cet exercice est très simple si on prend le temps de bien lire l'énoncé et qu'on sait utiliser sa calculette.

Partie A

1. Il suffit d'utiliser sa calculette pour calculer $P(X \leq 8) \approx 0.11$

2. Il suffit d'utiliser sa calculette pour calculer $P(8 \leq X \leq 26) \approx 0.85$

3. On veut jsutifier sans utiliser la calculette que $P(3.5 \leq X \leq 27.5) \approx 0.95$.
On remarque que $15.5 - 2\sigma = 3.5$ et $15.5 + 2\sigma = 27.5$.
Or on sait que $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$

Partie B

1. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirage parmi les 10 tirages. X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.25$.
En effet, pour chaque tirage est identique et indépendant. De plus, il n'y a à chaque fois que 2 issues possibles :
   — succès, l'échantillon a été prélévé par l'équipe de Sebastien
   — échec, l'échantillon n'a pas été prélévé par l'équipe de Sebastien
2. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors pour tout entier k compris entre 0 et n on a :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On applique pour $k = 4$, $n = 10$, et $p = 0.25$.

$$p(X = 4) = \binom{10}{4} 0.4^4 \times 0.6^6 \approx 0.15$$

3. La probabilité qu'au moins 2 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien correspond à $P(X \geq 2)$.

Astuce : On ne peut pas faire à la calculette $P(X \geq k)$, il faut donc utiliser le fait que $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

Il n'y a pas de formules simples, il faut le faire à la calculette.
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0.76$.

Partie C

On veut obtenir un intervalle au niveau de confiance de 95 poucents dont l'amplitude est inférieure à 0,1.
Pour rappel l'amplitude d'un intervalle de fluctuation est de $\frac{2}{\sqrt{n}}$.
On veut donc résoudre $\frac{2}{\sqrt{n}} < 0.1$

$$\begin{aligned} & \tfrac{2}{\sqrt{n}} < 0.1 \\ \iff & 2 < 0.1\sqrt{n} \\ \iff & 10 < \tfrac{\sqrt{n}}{2} \\ \iff & 20 < \sqrt{n} \\ \iff & 400 < n \end{aligned}$$

Il faut donc au moins 401 échantillons.

Exercice 4

Notions abordées : étude d'une fonction, convexité, lecture graphique.

Partie A

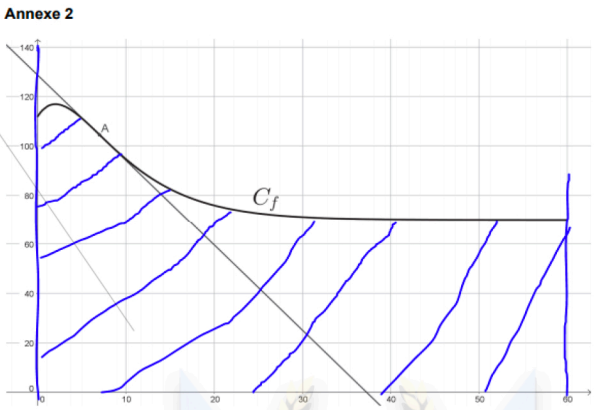
Dans toute cette partie, les réponses sont obtenues graphiquement à partir de la courbe représentative de f donnée en annexe 2.

On admet que le point A de C_f d'abscisse 7 est un point d'inflexion de C_f.
1) On peut lire graphiquement que $f(0) = 113$ et $f(60) = 70$.

2) On cherche $f''(7)$. Puisque 7 est un point d'inflexion on en déduit que $f''(7) = 0$.

3) On considère la surface située entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$.

a) On a la figure suivante :



3b) On remarque que l'aire hachurée comprend au moins 20 complets (et certains incomplets). Un carreau a une aire de $10 \times 20 = 200ua$.
L'aire hachurée est donc au moins de $200 \times 20 = 4000ua$.
On peut donc en déduire que l'estimation est fausse.

Partie B

1) On sait que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0, 60]$. Il suffit donc de dériver la fonction, $\forall x \in [0, 60]$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 14\mathrm{e}^{-x/5} + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}\right) \\ &= \left(14 - \frac{1}{5} \times (14x + 42)\right) \mathrm{e}^{-x/5} \\ &= \frac{1}{5}(70 - 14x - 42)\mathrm{e}^{-x/5} \\ &= \frac{1}{5}(-14x + 28)\mathrm{e}^{-x/5} \end{aligned}$$

2.a) D'après la question précédente étiduer le signe de $f'(x)$ revient à étudier le signe de $\frac{1}{5}(-14x + 28)\mathrm{e}^{-x/5}$.

Astuce : Une exponentielle est toujours positive. Cela signifie que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > 0$, mais aussi que quelque soit la fonction u, $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^u(x) > 0$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{x} > 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x/5} > 0$.
Il suffit donc d'étudier le signe de $-14x + 28$.

$$\begin{array}{rl} & -14x + 28 > 0 \\ \iff & -14x > -28 \\ \iff & 14x < 28 \\ \iff & x < 2 \end{array}$$

On en déduit donc que :
- $f'(x) = 0$ si $x = 2$
- $f'(x) < 0$ si $x < 2$
- $f'(x) > 0$ si $x > 2$

2.b) Avec les résultats de la question précédente on obtient le tableau de variation suivant :

3) Une fonction est convexe si et seulement sa dérivée seconde est positive.
On peut lire sur la capture d'écran que $\forall x \in [0, 60]$, $f''(x) = 14\mathrm{e}^{\frac{1}{5}} \times \frac{x-7}{25}$.
Il faut donc étudier le signe de $f''(x)$.
On précedemment on a que $14\mathrm{e}^{\frac{1}{5}} > 0$.
Le signe dépend uniquement de $x - 7$.

Donc pour $x < 7$ c'est à dire sur $[0, 7]$, $f''(x) < 0$ et f est concave.
Donc pour $x > 7$ c'est à dire sur $[7, 60]$, $f''(x) > 0$ et f est convexe.

Astuce : Pour montrer qu'une fonction G est une primitive d'une autre fonction g, il suffit de dériver G et de montrer qu'on obtient g

4.a)

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in [0, 60] & = & -70\mathrm{e}^{\frac{-x}{5}} - \frac{1}{5}(-70x - 560)\mathrm{e}^{\frac{-x}{5}} \\ & = & -70\mathrm{e}^{\frac{-x}{5}} + 14x\mathrm{e}^{\frac{-x}{5}} + 112\mathrm{e}^{\frac{-x}{5}} \\ & = & \mathrm{e}^{\frac{-x}{5}}(14x + 42) \\ & = & g(x) \end{array}$$

Donc G est une primitive de g sur l'intervalle de $[0, 60]$.

4.b) On remarque que $f(x) = 70 + g(x)$.
On en déduit donc qu'une primitive de f sur $[0, 60]$ est $F(x) = 70x + (-70x - 560)\mathrm{e}^{\frac{-x}{5}}$.

4.c) On a en utilisant le résultat précédente :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{60} f(x)\mathrm{d}x \\ &= F(60) - F(0) \\ &= 4200 - 4760\mathrm{e}^{-12} + 560 \\ &= 4760\left(1 - \mathrm{e}^{-12}\right) \\ &\approx 4760\text{u.a} \end{aligned}$$

Astuce : Il faut se rappeler que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Attention a bien exprimer le résultat en u.a qui signifie unités d'aire.

Partie C

D'après la partie précédente, l'aire d'un accoudoir est de 4700 ua.
L'aire totale à vernir est donc $4760 \times 2 + 5400 = 14920\ cm^2 = 1,492 m^2$.
Or il lui reste un quart d'un pot de vernis qui peut couvrir $10 m^2$.
Il peut donc couvrir $\frac{1}{4}10 = 2,5 m^2$.
Il a donc assez de vernis.