Kit de survie
Dérivabilité et continuité

La quasi totalité des sujets de bac comprennent un exercice d'étude de fonctions.

Pour traiter un tel exercice, il faut absolument maîtriser la notion de dérivabilité, de continuité ou de limite.

Cette fiche n'a pas pour but de se substituer à un cours, mais uniquement de vous redonner les bases et de vous rafraichir la mémoire.

Compétences que doit maitriser le candidat :
- définition de la conitinuité et de la dérivabilité
- équation d'une tangente à la courbe
- les formules des dérivés classiques
- le théorème des valeurs intermédiaires, attention à bien maitriser les hypothèses
- le théorème de la bijection, attention à bien maitriser les hypothèses

La dérivabilité

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I.
Alors la fonction f est dérivable en a, s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$
ou tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} = l$.
f est alors dérivable au point d'abscisse a et son nombre dérivé en a est le réel l noté $f'(a)$

Définition : Tangente : soit f une fonction dérivable en a. La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est la droite qui admet pour coefficient directeur $f'(a)$ et qui passe par la point $(a, f(a))$.
La tangente admet donc pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Cela donne un théorème : Si f est une fonction dérivable en a, alors sa courbe admet une tangente au point d'abscisse a qui a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Il est impératif de connaître les dérivés usuelles. Voici un tableau récapitulatif :

Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction	Fonction dérivé
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f : x \mapsto a$	$f : x \mapsto 0$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f : x \mapsto x$	$f : x \mapsto 1$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f : x \mapsto ax + b$	$f : x \mapsto a$
$\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f : x \mapsto x^n$	$f : x \mapsto nx^{n-1}$
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$f : x \mapsto \frac{-1}{x^2}$
$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^*_+$	$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Théorème : Toute fonction polynomiale ou rationelle est dérivable sur son domaine de définition. La somme, le produit, le quotient de fonctions dérivables est une fonction dérivable.

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
ku $k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-1}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Théorème : dérivé d'une fonction composée
g est une fonctin dérivable sur I à valeurs dans J
f est une fonction dérivable sur J
Alors, la fonction $(f \circ g)$ est dérivable sur I et $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.

On peut donc appliquer ce théorème aux fonctions classiques.

Fonction	Fonction dérivée
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

La continuité

Définition : Une fonction est continue si on peut tracer sa courbe sans "lever le stylo". C'est à dire qu'il n'y a pas de trou dans la courbe.

Une fonction est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Théorème On a les résultats suivants :

- si f est continue sur un intervalle I, alors elle est continue en tout point de I
- toute fonction polynomiale ou rationnelle est continue sur son domaine de définition
- la sommme, le produit, le quotient ou la composition de fonction continue est une fonction continue.
- toute fonction dérivable sur I, est continue sur I. Attention la réciproque est fausse.

Attention, la réciproque du dernier point est fausse, la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable uniquement sur $\mathbb{R}^*$.

Théorème des valeurs intermédiaires
Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[a; b]$ à valeurs dans $[m, M]$. Alors quelque soit le

réel $c \in [m; M]$, l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$.

Corollaire : Théorème de la bijection
Soit f une fonction strictement monotone et continue sur l'intervalle $[a; b]$. Alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $[f(a), f(b)]$. L'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution.