Elements de correction du bac mathématiques 2019 série S

Exercice 1

On considère la fonction $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

1a) On sait que $\lim_{x \to \infty} e^x = +\infty$.
De plus $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$.
On en déduit que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = +\infty$.
Finalement $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

1b) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et dérivables sur cet intervalle.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{-1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.
Le signe dépend de l'expression entre parenthèse.

$f'(x) < 0$ si et seulement si $\left(e^x - e^{-x}\right) > 0 \iff e^x > e^{-x}$
$\iff ln(e^x) > ln(e^{-x})$ car la fonction ln est croissante
$\iff x > -x$
Ce qui est vrai pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$.
La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

1c. Calculons $f(0)$.
$f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(e^0 + e^{-0}\right) = \frac{5}{2}$.
De plus, on sait que $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

La fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, à valeurs dans $]-\infty, \frac{5}{2}[$, par conséquent d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$ que l'on notera α.

2. Calculons $f(-x)$.
$f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{+x}\right) = f(x)$.
Par conséquent, $f(x) = f(-x)$.
Par conséquent, si $f(x) = 0$ alors $f(-x) = 0$.
D'après la question 1c, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Soit α cette solution. On a donc $f(\alpha) = 0$ et $\alpha \neq 0$.
On en déduit que $f(-\alpha) = 0$.
Et donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et celles ci sont opposées.

Partie B

1. La courbe C_f admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie, et la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, $f(0)$ est nécessairement le maximum de la fonction. De plus, rappelons que $f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$

La hauteur d'un arceau est donc $f(0)-f(\alpha)=\frac{5}{2}m$.

2a. On a

$$\begin{aligned}1+\left(f'(x)\right)^2 &= 1+\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\right)^2\\ &= 1+\frac{1}{4}\left(\left(\mathrm{e}^x\right)^2-2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}+\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2\right)\\ &= 1+\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x\right)^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\left(\left(\mathrm{e}^x\right)^2+2+\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2\right)\end{aligned}$$

Pour se ramener à la forme proposée par l'énoncé calculons $\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)^2=\left(\mathrm{e}^x\right)^2+2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}+\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2=\left(\mathrm{e}^x\right)^2+2+\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2$

On a donc bien $1+\left(f'(x)\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2$.

2b. L'énoncé nous donne que $I=\int_0^\alpha \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$.
On remplace par l'expression trouvée à la question précédente.
On obtient $I=\int_0^\alpha \sqrt{\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}\mathrm{d}x$
$=\int_0^\alpha \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$
$=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\alpha=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)$

Attention au moment d'enlever la racine à bien le justifier $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\geqslant 0$.

L'énoncé précise que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie. Par conséquent, la longueur de l'arc sur $[-\alpha,\alpha]$ vaut 2 fois la longueur de l'arc sur le segment $[0,\alpha]$.

On en déduit que la longueur de l'arc est de $e^\alpha-e^{-\alpha}$ mètres.

Partie C

1. La quantité de bache nécessaire pour couvrir les parties nord et sud correspond à 2 fois l'aire sous la courbe entre les droites d'équation $x=-\alpha$ et $x=\alpha$ moins l'aire de l'ouverture qui est de $2\times 1=2m^2$.

On a donc $A=2\int_{-\alpha}^\alpha f(x)\mathrm{d}x-2$.
Or C_f admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
Donc $A=2\int_{-\alpha}^\alpha f(x)\mathrm{d}x-2=4\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x-2$

2. L'aire totale correppond à l'aire de la question précédente plus l'aire de la partie rectangulaire servant à couvrir la serre.

Commençons par calculer l'aire de la question précédente.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 4\int_0^\alpha \frac{7}{2}-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x-2\\ &= 4\left[\frac{7}{2}x-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^\alpha-2\\ &= 14\alpha-2\left(\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)-2\end{aligned}$$

La bache sur le dessus est un rectangle de longueur 4,5m et de largeur $e^\alpha-e^{-\alpha}$.

L'aire du rectangle est donc $4,5(e^{\alpha} - e^{-\alpha})m^2$.

En sommant les deux parties on obtient une aire de $14\alpha - 2\left(\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}\right) - 2 + 4,5\left(\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}\right)$.
On remplace alors α par 1m92, et on obtient une aire de $42m^2$.

Exercice 2

1a. La durée moyenne correspond ici à l'espérance.
X_A suit une loi uniforme sur $[9; 25]$.
On en déduit $E(X_A) = \frac{9+25}{2} = 17$ minutes.

1b. On peut lire graphiquement que $\mu = 17$ minutes.
Or μ correspond à la moyenne.
La durée moyenne d'une partie est donc de 17 minutes également.

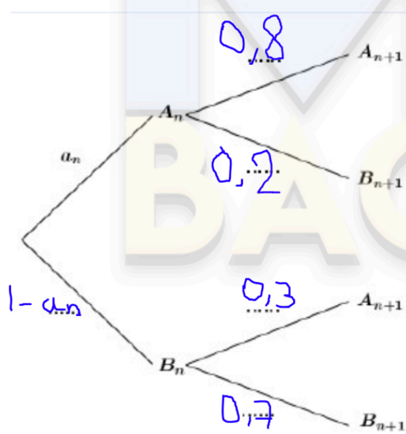
2. On choisit au hasard, de manière équiprobable, un type de jeu. On a donc 1 chance sur 2 de tirer chaque jeu. On cherche la probabilité que la partie dure moins de 20 minutes.

D'après la formule des probabilités totales on a : $\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant 20) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\mathrm{X_A} \leqslant 20\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\mathrm{X_B} \leqslant 20\right)$

$\mathbb{P}\left(\mathrm{X_A} \leqslant 20\right) = \frac{20-9}{25-9} = \frac{11}{16}$.
Pour $\mathbb{P}\left(\mathrm{X_B} \leqslant 20\right)$ on utilise la calculette et on obtient $\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant 20) \approx 0,76$.

Partie B

1a. On complète l'arbre proposé en lisant soigneusement le sujet.



1b. On utilise la formule des probabilités totales en lisant l'arbre de la question précédente.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{n+A}) &= \mathbb{P}(A_{n+A}|a_n) + \mathbb{P}(A_{n+A}|b_n) \\
&= a_n \times 0,8 + (1 - a_n) \times 0,3 \\
&= 0,3 + a_n(0,8 - 0,3) \\
&= 0,3 + 0,5a_n
\end{aligned} \tag{1}$$

2a. On se place dans le cas particulier où $a = 0,5$.
Montrons par récurrence la propriété P(n) : "$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq a_n \leq 0,6$".

Initialisation : on a $a_1 = a = 0,5$.
Donc P(1) est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}*$, on suppose P(n) vraie.
D'apres la question précédente : $a_{n+1} = 0,3 + 0,5a_n$.
Or par hypothèse de récurrence $0,5a_n \leq 0,5 \times 0,6 \leq 0,3$.
On en déduit que $a_{n+1} \leq 0,3 + 0,3 = 0,6$.
Donc P(n+1) est vérifiée. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq a_n \leq 0,6$.

2b. Pour trouver le sens de variation de la suite on étudie le signe de $a_{n+1} - a_n$.
$a_{n+1} - a_n = 0,3 + 0,5a_n - a_n = 0,3 - 0,5a_n$.
Or d'après la question précédente $a_n \leq 0,6$ donc $0,5a_n \leq 0,5 \times 0,6 \leq 0,3$.
On en déduit que $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et donc $a_{n+1} \geq a_n$. La suite (a_n) est donc croissante.

2c. D'après les deux questions précédentes, la suite (a_n) est croissante et majorée, d'après le théorème de la limite monotone elle converge. Soit l sa limite. On passe à la limite dans la relation de récurrence et on obtient $l = 0,3 + 0,5l$.
Donc $0,5l = 0,3$ puis $l = \frac{3}{5}$.

3a. On étudie maintenant le cas général.
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 0,6$.
Pour montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique on cherche à exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,6 \\
&= 0,5a_n + 0,3 - 0,6 \\
&= 0,5\,(u_n + 0,6) - 0,3 \\
&= 0,5u_n
\end{aligned}$$

On en déduit que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (0,5)^{n-1}u_1$

3b. On a $u_n = a_n - 0,6$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (0,5)^{n-1}u_1$. On en déduit

$$\begin{aligned}
a_n &= u_n + 0,6 \\
&= (0,5)^{n-1}u_1 + 0,6 \\
&= (0,5)^{n-1}(a - 0,6) + 0,6
\end{aligned}$$

3c. On vient de démontrer que $a_n = (0,5)^{n-1}(a - 0,6) + 0,6$.
Comme $|0,5| < 1$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty}(0,5)^{n-1} = 0$. Donc $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,6$.
On remarquera qu'on retrouve le résultat de la question 2c et que cette limite est indépendante de la valeur de a.
3d. D'après la question précédente, plus n est grand et plus la probabilité a_n tend vers 0,6. Donc b_n tend vers 0,4. Un joueur qui joue massivement aura donc plus de chance de voir la publicité associée au jeu A.

Exercice 3

1. Considérons l'équation dans $\mathbb{C}$, $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de l'équation.
On cherche à savoir si le triangle OAB est équilatéral.
$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 = 12 - 16 = -4$.
On en déduit $z_1 = \frac{2\sqrt{3}-i\sqrt{4}}{2} = \sqrt{3} - pii$ et $z_2 = \frac{2\sqrt{3}+i\sqrt{4}}{2} = \sqrt{3} + i$.

Par conséquent $OA = OB = \sqrt{3+1} = 2$.
De plus $AB = |z_1 - z_2| = |2i| = 2$.
Le triangle est bien équilatéral.

2. On considère $u = \sqrt{3} + i$
On a alors $|u| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.
De plus $\theta = arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$.
On peut donc écrire $u = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Alors $u^{2019} + u^{-2019} = u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 2^{2019}\mathrm{e}^{i\frac{2019\pi}{6}} + 2^{2019}\mathrm{e}^{-i\frac{2019\pi}{6}}$.
Or $\frac{2019}{6} = 336,5$.
On en déduit que $\mathrm{e}^{i\frac{2019\pi}{6}} + = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
De même $\mathrm{e}^{-i\frac{2019\pi}{6}} + = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

On conclut donc que $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 0$.

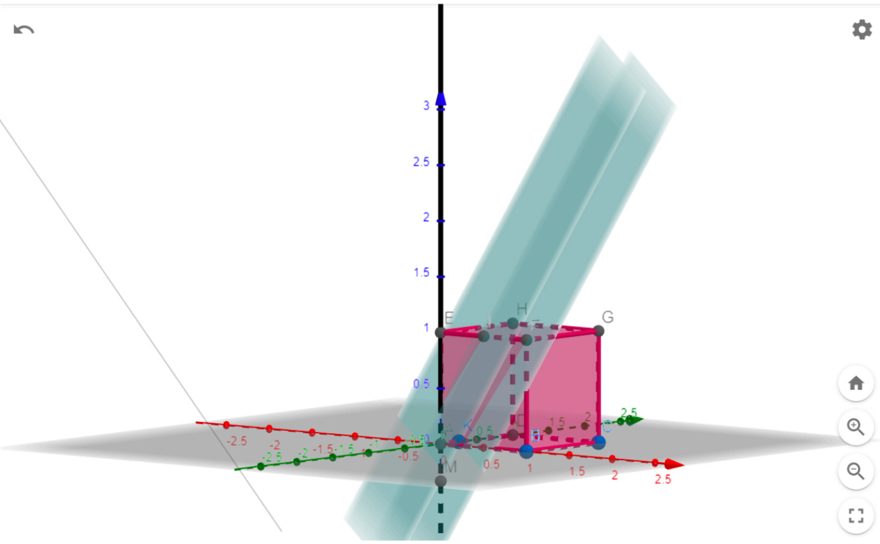
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$.
$\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) = e^{-nx+1} - nxe^{-nx+1} = e^{nx+1}(1 - nx)$
L'exponentielle étant toujours positive, le signe de $f'(x)$ est celui de $(1 - nx)$.
f_n est croissante sur $[0, \frac{1}{n}]$ décroissante sur $[\frac{1}{n}, +\infty]$.
f_n admet donc un maximum pour $x = \frac{1}{n}$.

4. On considère la fonction f définie par $f(x) = cos(x)e^{-x}$.
On sait que $|cos(x)| \leq 1$.
Donc $|f(x)| \leq e^{-x}$.
$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$.
On en déduit que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
Donc l'affirmation est vraie car la droite $y = 0$ est une asymptote.

5. L'algorithme s'arrête quand $I = 15$.
Or si l'algorithme s'arrete cela veut dire que $2^I > A$. Donc $2^{15} > A$, puis $ln(2^{15}) > ln(A)$ donc $15ln(2) > ln(2)$.

Exerice 4

Partie A



Partie B

1a. $\vec{n}$ est normal au plan si il est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan.
Or $\overrightarrow{\mathrm{FH}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FK}}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{4}\\-1\end{pmatrix}$.
On a donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FH}}=-4+4=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FK}}=-4+1+3=0$
Par conséquent $\vec{n}$ est bien un vecteur normal au plan.

1b. $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan.
Une équation cartésienne du plan est donc $4x+4y-3+d=0$.
Le point F appartient au plan donc il vérifie l'équation.
Il a pour coordonnées (1,0,1). Ce qui nous donne $4+0-3+d=0$.
Donc $d=-1$.
Une équation du plan est donc $4x+4y-3-1=0$.

1c. On vient de déterminer une équation du plan (FHK).
Cette équation est $4x+4y-3-1=0$.
Le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (FHK) par conséquent ils ont les mêmes vecteurs normaux.
On reprend le raisonnement de la question précédente mais en utilisant le point I.
Le point I a pour coordonnées $(\frac{1}{2},0,1)$.
On injecte dans $4x+4y-3+d=0$.
On trouve $2+0-3+d=0$.
On en déduit $d=1$. Une équation du plan est donc $4x+4y-3+1=0$.

1d. On cherche à calculer les coordonées du point M', point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).
Une équation du plan $\mathscr{P}$ est $4x+4y-3+1=0$.

On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Donc une équation paramètrique de la droite (AE) est

$$x = 0$$
$$y = 0, t \in \mathbb{R}$$
$$z = t$$

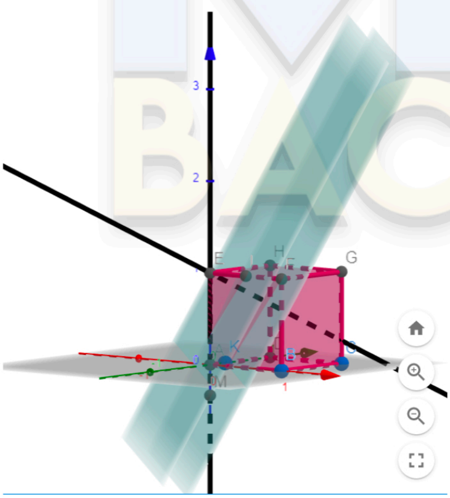
Puisque M' est le point d'intersection, il vérifie les 2 équations.
On injecte l'expression de x, y et z dans l'expression de P. On obtient $-3t+1=0$, ce qui nous donne $t=\frac{1}{3}$.
On en déduit que M' a pour coordonnées $(0,0,\frac{1}{3})$.

2a. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$. Puisque la droite est orthogonale au plan $\mathscr{P}$, un vecteur directeur est $\vec{n}$.
On en déduit la représentation paramètrique.

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 4t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 1-3t \end{cases}$$

2b. on veut calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
On peut voir sur la figure de l'annexe qu'une équation du plan (ABC) est $z=0$.
L est le point d'intersection, il vérifie donc les 2 équations On injecte l'expression de x, y et z dans l'équation du plan (ABC). On obtient $1-3t=0$.
Donc $t=\frac{1}{3}$.
Finalement L a pour coordonnées $(\frac{4}{3},\frac{4}{3},0)$.

2c.



2d. On se demande si la droite Δ et (BF) sont sécantes.
Or la droite (BF) appartient au plan (BFE). Δ intercepte ce plan en E.
Par conséquent les deux droites ne peuvent pas être sécantes.

Une représentation paramétrique de la droite (CG) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1, t' \in \mathbb{R} \\ z = t' \end{array}\right.$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1, t' \in \mathbb{R} \\ z = t' \end{array}\right.$$

On égalise les deux équations.

$$\left\{\begin{array}{l} 4t = 1 \\ 4t = 1, t' \in \mathbb{R} \\ 1 - 3t = t' \end{array}\right.$$

On en déduit $t = \frac{1}{4}$, $t' = \frac{1}{4}$.
Le point d'intersection est donc $(1, 1, \frac{1}{4})$.