Correction bac mathématiques 2017

Exercice 1

Notions abordées : fonction, tableau de variation, dérivé, intégrale, limites, algorithmique.

1. On considère la fonction $h(x) = xe{-}x$.
On s'intéresse à la limite en plus l'infini.
Il faut ici utiliser les croissances comparées et donc se ramener à une forme connue.

On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On peut écrire h sous la forme $h(x) = \frac{x}{e^x}$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Méthodologie : Le calcul de limite qui mélange des exponentielle et des termes en x ne peut être fait qu'avec le théorème des croissances comparées ou en faisant apparaître un taux d'accroissement. Il faut donc réussir à ramener l'expression qu'on cherche à calculer à une forme connue. Cela peut souvent se faire en factorisant, ou en remplaçant e^{-x} par $\frac{1}{e^x}$

2. La fonction h est continue et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, en tant que somme de fonctions continues et dérivables sur cet intervalle.

$\forall x \in [0;+\infty\,[, h'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$
On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, donc , $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$.
De plus, $\forall x \in [0,1], 1-x \geq 0$, et $\forall x \in [1,+\infty[, 1-x \leq 0$
La seule solution de $h(x) = 0$ est $x = 1$.

De plus $h(0) = 0e^0 = 0$

On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Méthodologie : Pour tracer le tableau de variation d'une fonction, il faut :
- définir le domaine d'étude de la fonction
- restreindre le domaine sur lequel on effectue les calculs, grâce à la parité ou imparité de la fonction
- définir le domaine de dérivabilité
- calculer la dérivé
- déterminer les réels tels que la dérivé s'annule
- déterminer le signe de la dérivé sur chaque intervalle
- calculer les limites pour chaque intervalle

3.a. D'après la question précédente, $\forall x \in [0;+\infty[, h'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$.
Donc, $\forall x \in [0;+\infty[, e^{-x} - h'(x) = e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x}$
Or $\forall x \in [0;+\infty[, h(x) = xe^{-x}$
Donc $\forall x \in [0;+\infty[, e^{-x} - h'(x) = h(x)$

3.b. On cherche une fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ qui quand on la dérive donne e^{-x}. Considérons la fonction F, telle que $\forall x \in [0;+\infty[$, $F(x) = -e^{-x}$. F est dérivable sur $[0;+\infty[$, et $\forall x \in [0;+\infty[, F'(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$

Donc H est bien une primitive de la fonction demandée.

Astuce : Quand on cherche une primitive pour une fonction exponentielle, il suffit souvent de jouer sur les signes et les constantes, car on a $(e^x)' = e^x$.
3.c D'après la question 3.a $\forall x \in [0;+\infty[$, $h(x) = e^{-x} - h'(x)$. Une primitive de h est donc la somme d'une primitive de la fonction $f(x) = e^{-x}$ et de h'. La question 3b nous donne une primitive f. Une primitive de h' est h. On en déduit qu'une primitive de h est $H(x) = -e^{-x} - h = -e^{-x} - xe^{-x} = (x+1)e^{-x}$.

Astuce : pour vérifier que la primitive qu'on a trouvée est bonne, il suffit de la dériver et de vérifier qu'on retrouve bien l'expression de h.

Partie B

1.a. La distance MN correspond la distance entre $f(x)$ et $g(x)$. On a donc $MN = f(x) - g(x) = xe^{-x} = h(x)$. D'après le tableau de variation de la question 1b cette distance est maximale pour $x = 1$. Elle vaut alors $h(1) = 1e^{-1} = e^{-1}$.

1.b et 2.a. Voir la figure ci dessous

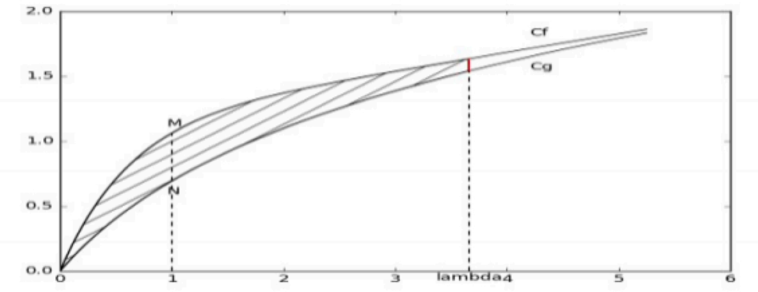

FIGURE 1 – Réponse aux questions 1b et 2a

2.b L'aire hachurée, notée A, correspond à l'aire sous la courbe entre 0 et λ de C_f moins l'aire sous la courbe C_g.

Or l'aire sous la courbe entre 0 et λ de C_f est la valeur de l'intégrale de f entre 0 et λ.

On a donc

$$A = \int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x - \int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\lambda f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \int_0^\lambda h(x)\mathrm{d}x$$

Or d'après la question 3c, une primitive de h est $H(x) = -(x+1)e^{-x}$.

Donc

$$A = \int_0^\lambda h(x)\mathrm{d}x = H(\lambda) - H(0) = -(\lambda+1)e^{-\lambda} + (0+1)e^{-0} = -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}$$

Astuce : il faut garder à l'esprit le lien entre intégrale et aire sous la courbe.

2.c Pour calculer la limite, il faut cette fois ci se ramener à un taux d'accroissement. On sait que $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

3.a. A l'initialisation on a S $= 0,8$ et $\lambda = 0$.

— $1 - \dfrac{\lambda+1}{e^\lambda} = 0 < 0.8$, donc l'algorithme continue, $\lambda = 1$

— $1 - \dfrac{\lambda+1}{e^\lambda} = 0.2642 < 0.8$, donc l'algorithme continue, $\lambda = 2$

— $1 - \dfrac{\lambda+1}{e^\lambda} = 0.5940 < 0.8$, donc l'algorithme continue, $\lambda = 3$

— $1 - \dfrac{\lambda+1}{e^\lambda} = 0.009 > 0.8$, donc l'algorithme s'arrête.

La valeur de λ retournée est donc 3.

3b. Cet algortihme sert à déterminer l'inntervalle $[0;\lambda]$ qu'il faut considérer pour que l'aire entre les courbes f et g soit au moins égale à S.

Exercice 2

Notions abordées : géométrie dans l'espace, équation de plans et de droites.

1. Le point A n'appartiendra au plan que s'il vérifie l'équation du plan. Cette équation est $2x - z - 3 = 0$.
Le point A a pour coordonnées $(1, a, a^2)$.
Si on l'injecte dans l'équation on obtient $2 \times 1 - a^2 - 3 = -(a^2+1)$. Or $\forall a \in \mathbb{R}$, $(a^2+1) \geq 1$.
Donc il n'existe aucune valeur de a telle que les coordonnées vérifient l'équation du plan.

Méthodologie : la seule façon de démontrer qu'un point appartient (ou non) à une droite ou à un plan et de montrer qu'il en vérifie (ou non) l'équation.

2.a. La droite D passe par le point A et est orthogonale à P. On rappelle qu'une droite est orthogonale a un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$, si son vecteur directeur est colinéaire à $\vec{n} = (a, b, c)$.

La droite D est donc colinéaire au vecteur $(2, 0, -1)$. De plus, elle doit passer par le point A. Elle doit donc vérifier que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{n}$. On projette sur chacun des axes et on obtient :

$$x = 1 + 2t$$
$$y = a$$
$$z = a^2 - t$$

2.b. Puisque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{n}$, on en déduit que $AM = |t\vec{n}| = |t|\sqrt{2^2 + 1^2} = |t|\sqrt{5}$.

3. H est le point d'intersection entre le plan P et la droite D, par conséquent ses coordonnées vérifient les équations du plan et de la droite.
On a donc

$$2x - z + 3 = 0$$
$$x = 1 + 2t$$
$$y = a$$
$$z = a^2 - t$$

On remplace x, y et z par leur expression dans l'équation du plan et on obtient $2(1+2t)-(a^2-t)-3 = 0$.

On cherche ici pour quelle valeur de a la distance AH est minimale, on doit donc exprimer t en fonction de a puis chercher à minimiser cette expression.

L'équation peut se récrire $2 + 4t - a^2 + 3 - 3 = 0$.
Ce qui conduit à $t = \dfrac{a^2 + 1}{5}$.
Il faut ensuite injecter cette expression de t donc la longueur AH.
$AH = |n||t| = \sqrt{5}\dfrac{a^2 + 1}{5}$.
Il est alors évident que cette distance est minimale pour $a = 0$.

Méthodologie : cette question est un peu plus longue et délicate à traiter que les autres. Il faut y aller par étapes. Le candidat gardera à l'esprit que même s'il ne va pas au bout de la question, tout début de raisonnement pourra lui ramener une partie des points de la question. Il ne faut donc pas hésiter à écrire un bout de réponse même si elle n'est pas complète.

Astuce : si un point appartient à une intersection, il vérifie les équations des 2 objets géométriques (plans, droites etc). Il faut donc écrire le système formé par ces 2 équations.

Exercice 3

Notions abordées : probabilités, nombres complexes.

Partie A

1. On considère le point P, on peut lire sur la figure que $40 < r < 60$ et que $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. La bonne réponse est donc la réponse C.

Méthodologie : il est indispensable de savoir placer les différents angles sur le cercle trigonométrique et de connaitre les cosinus et sinus associés.

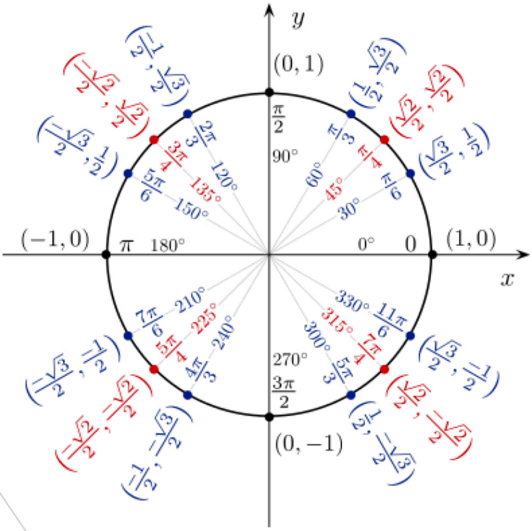

FIGURE 2 – Cercle trigonométrique et angles associés

On s'intéresse au point d'affixe $z = 70e^{\frac{-i\pi}{3}}$.
On sait que $\frac{-\pi}{2} < \frac{-\pi}{3} < \frac{-\pi}{4}$. Donc le point appartient au segment G4.

On considère maintenant le point d'affixe $z = -45\sqrt{3} + 45i$.

On a $-45\sqrt{3} \approx -77.9$.
On peut placer le point en lisant absisse et ordonnée. Néanmoins cela est un peu compliqué, il est plus simple d'écrire le nombre sous forme exponentielle.

On a $r = \sqrt{(45\sqrt{3})^2 + 45^2} = \sqrt{45^2(3+1)} = 45 \times 2 = 90$.
Et $\theta = \arctan\left(\frac{45}{-45\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\pi}{6}$.

Attention on est ici à π près. En regardant les coordonnées de départ on conclut que $\theta = \frac{5\pi}{6}$. On est donc dans le secteur D4.

Méthodologie : pour placer un point sur un cercle, il est souvent plus simple d'utiliser la forme exponentielle.

Partie B

1. Il suffit d'utiliser sa calculette.
La variable aléatoire M suit une loi normale de paramètre $\mu = 50$ et $\sigma = 5$.
On trouve à la calculette $P(M < 0) = 8 \times 10^{-24}$.
Cet événement est donc complétement négligeable. On est très éloigné de la moyenne, 10 fois l'écart type, il est donc logique que la probabilité soit presque nulle et cela est parfaitement cohérent car un module est toujours positif.

Méthodologie : les calculs sur la loi normale se font toujours à la calculette, il est donc primordial de savoir comment l'utiliser.

2. Il suffit encore une fois de taper le calcul à la calculette.
$P(40 < M < 60) = P(M < 60) - P(X < 40) = 0.954$

3. On admet que $P(T \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[) = 0,819$
On cherche à calculer la probabilité que la foudre ait réellement frappée le secteur B3.
C'est à dire que $40 < r < 60$ et $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$.
On définit ainsi 2 intervalles I et J, et on cherche $P(r \in I \cap \theta \in J)$.
D'après l'énoncé ces 2 événements sont indépendants.
Donc $P(r \in I \cap \theta \in J) = P(r \in I) \times P(\theta \in J) = 0,954 \times 0,819 = 0,781$.

Exercice 4

Notions abordées : probablités, suites, limites, raisonnement par récurrence.

1. Il suffit de lire attentivement l'énoncé pour compléter l'arbre.

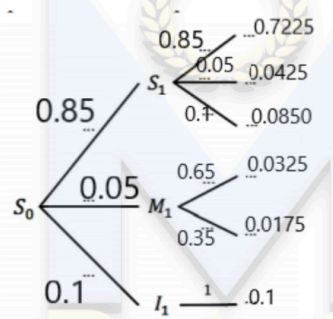

FIGURE 3 – Arbre de probabilités complet

2. Il suffit de lire l'arbre de la question précédente.
On a 3 branches qui mènent à une issue I_2.
On utilise alors la formule des probabilités totales.
$P(I_2) = P(S_1 \cap I_2) + P(M_1 \cap I_2) + P(I_1 \cap I_2) = 0.085 + 0.0175 + 0.1 = 0.2025$

3. On cherche ici une probabilité conditionnelle, celle que l'individu soit malade à l'étape 1 sachant qu'il est immunisé en semaine 2.

$$P(M_1|I_2) = \frac{P(I_2 \cap M_1)}{P(I_2)} = \frac{0.0175}{0.2025} = 0.086$$

Partie B

1. A chaque itération, un individu se trouve dans un des 3 états S, M ou I.
Par conséquent, la somme de ces 3 probabilités est forcément 1, donc $u_n + v_n + w_n = 1$.

2. On admet que $v_0 = 0$, et que $v_{n+1} = 0.65v_n + 0.05u_n$.
a. La cellule C2 correspond au calcul de v_1.
Il suffit donc d'appliquer la formule au rang 1, on a $v1 = 0.65v_0 + 0.05u_0$.
Il suffit ensuite de remplacer les termes v_0 et u_0 par les cellules correspondantes.

Il faut donc rentrer la formule suivante $C3 = 0.65C2 + 0.05B2$.

2b. Il suffit de lire dans la colonne C du tableau, la plus grande valeur puis de regarder l'indice de la semaine correspondante. Cette valeur est atteinte pour $n = 4$ et vaut 0.0859. Le pic épidémique est donc atteint dans la quatrième semaine.

3.a. On sait que lorsqu'un individu est dans l'état S, il y reste avec une probabilité de 0.85.
Un individu dans l'état M ou I ne plus revenir dans l'état S.
Par conséquent, on a $u_{n+1} = 0.85u_n$.
(u_n) est donc une suite géométrique de raison 0.85.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0.85^n$.

3.b On va démontrer par récurrence la propriété $P(n) : v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$.

Initialisation : au rang 0 on a $\frac{1}{4}\left(0,85^0 - 0,65^0\right) = 0$ et $v_0 = 0$. Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit n appartenant à $\mathbb{N}$, supposons que P(n) soit vraie.
On sait que $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.
$v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05 \times 0.85^n$, d'après la question 3.a.
$v_{n+1} = 0,65\left(\frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)\right) + 0,05 \times 0.85^n$, d'après HR
$v_{n+1} = \left(0.65 \times \frac{1}{4} + 0.05\right)0.85^n - \frac{1}{4} \times 0.65^{n+1}$

Méthodologie : on peut ici avoir l'impression d'être bloqué. Il faut simplifier au maximum l'expression puis partir du terme de l'hypothèse de récurrence et vérifier qu'on retrouve bien la même chose.

$$v_{n+1} = \left(0.65 \times \frac{1}{4} + 0.05\right)0.85^n - \frac{1}{4} \times 0.65^{n+1} = 0.2125 \times 0.85^n - \frac{1}{4} \times 0.65^{n+1}$$

Si on calcule avec l'hypothèse de récurrence on trouve :
$\frac{1}{4}\left(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}\right) = \frac{0,85}{4}0,85^n - \frac{0,65}{4}0,65^n = 0,2125 \times 0,85^n - 0,1625 \times 0,65^n$
On en déduit que P(n+1) est vérifiée.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0.85^n$, or $0.85 < 1$.
Par conséquent cette suite tend vers 0. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$ or $0.65 < 1$ et $0.85 < 1$.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} 0.85^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} 0.65^n = 0$.
On peut alors conclure que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Enfin d'après la question 1, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n + w_n = 1$.
Cela reste vrai si on passe à la limite, on a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n + w_n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} w_n =$

$1 - 0 - 0 = 1$.

On peut donc conclure qu'au bout d'un certains temps, l'intégralité de la population sera immunisée.