Correction bac mathématiques 2016

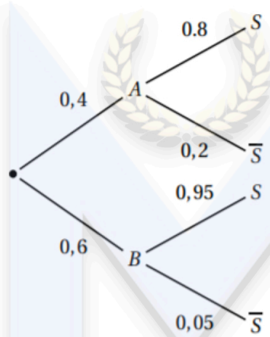
Exercice 1

Notions abordées : probabilités, intervalle de confiance.

Partie A

1.Il faut utiliser la formule des probabilités totales. Un élément sans défaut peut être produit par la chaine A ou la chaine B.

Méthodologie : il faut toujours faire un arbre dans les exercices de probabilités. Cela facilite ensuite les calculs.



On en déduit $P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap B) = 0.4 \times 0.8 + 0.6 \times 0.95 = 0.89$.

2. On s'interesse à un composant qui ne présente pas de défaut. On cherche à calculer la probabilité qu'il vienne de la chaîne A. Il s'agit donc d'une probabilité conditionnelle.

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0.32}{0.89} = 0.36$$

Partie B

1. On considère un échantillon d'une taille $n = 400$, on observe que les composants sont sans défaut avec une fréquence $f = 0.92$. Pour utiliser le théorème du cours, on commence par vérifier les hypothèses :

— $n = 400 > 30$

— $nf = 400 \times 0.92 = 368 > 5$

— $n(1-f) = 32 \geq 5$

On peut donc appliquer la formule du cours $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, ce qui nous donne $\left[0.92 - \frac{1}{\sqrt{400}}; 0.92 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] =$ $[0.87; 0.97]$.

2. On souhaiterait obtenir un intervalle d'amplitude 0.02, on se demande quelle devrait alors être la taille de l'échantillon.
D'après la formule utilisée à l'exercice précédent, l'intervalle est d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

On doit donc résoudre $\frac{2}{\sqrt{n}} = 0.02$.

Donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.01$.

Puis $\sqrt{n} = \frac{1}{0.01}$.

Enfin $n = \frac{1}{0.01^2} = 10000$.

Partie C

1. La durée de vie d'un composant est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a.

$$P(T \leq a) = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

Donc $P(T \leq a)$ représente l'aire sous la courbe entre les droites $x = 0$ et $x = a$.

b. On applique la formule de la question précédente.

$$\begin{aligned} P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^t e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} * e^{-\lambda x} \right]_0^t \\ &= -e^{-\lambda t} - (-1) = 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

c. D'après la question précédente, $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{P}(T \leq t) = \lim_{t \to +\infty} 1 - e^{-\lambda t}$.
Or $\lim_{t \to +\infty} 1 - e^{-\lambda t} = 0$
Donc $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{P}(T \leq t) = \lim_{t \to +\infty} 1 - e^{-\lambda t} = 1$

2. On suppose $P(T \leq 7) = 0.5$.
On cherche le λ correspondant.
Cela revient à résoudre $1 - e^{-\lambda 7} = 0.5$.
Donc $e^{-\lambda 7} = -0,5$.
Puis on résout simplement l'équation :

$$\begin{aligned} &\ln\left(e^{-\lambda 7}\right) = \ln(0.5) \\ &-\lambda 7 = \ln(0.5) \\ &\lambda = \frac{\ln(0.5)}{7} \approx 0.099 \end{aligned}$$

.

Méthodologie : Quand on résout une équation et que l'inconnue se trouve dans une exponentielle, il faut appliquer la fonction réciproque, c'est à dire le logarithme, pour isoler l'inconnue. C'est la seule manière de résoudre ce type d'équation. Cette méthode devrait donc devenir un réflexe pour le candidat.

3a. On prend $\lambda = 0.099$, on cherche la probabilité qu'un composant ait une durée de vie de moins de 5 ans.

D'après la question 1b, $P(T \leq 5) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0.99\times 5} = 1 - 0.61$.

On en déduit la probabilité démandée $P(T \geq 5) = 1 - P(T \leq 5) = 0.61$.

3b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans. On cherche la probabilité que ce composant fonctionne encore au bout de 7 ans.

La durée de vie d'un composant est modélisée par une loi exponentielle, on rappelle qu'une telle loi est sans mémoire.

Par conséquent, $\mathrm{P}_{(T\geqslant 2)}(T \geqslant 7) = \mathrm{P}(T \geqslant 5) = 0.61$, d'après la question précédente.

3c. On sait d'après le cours que l'espérance d'une loi exponentielle est $\dfrac{1}{\lambda}$.

Par conséquent, $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0.099} = 10.1$.
Cela signifie qu'en moyenne un composant a une durée de vie d'environ 10 ans.

Exercice 2

Notions abordées : géométrie dans l'espace. Cet exercice est composé de 4 vrai/faux. Les questions nécessitent une rédaction précise et rigoureuse. Elles sont un peu plus longues que les questions des autres exercices. Néanmoins, si le candidat connait les "méthodes classiques", il n'aura aucun mal à traiter l'exercice.

Astuce : Avant de traiter un exercice de géométrie, il faut prendre le temps de faire un schéma propre et en respectant les distances et les angles. Ce dessin sera d'une grande aide pour traiter les vrai/faux.

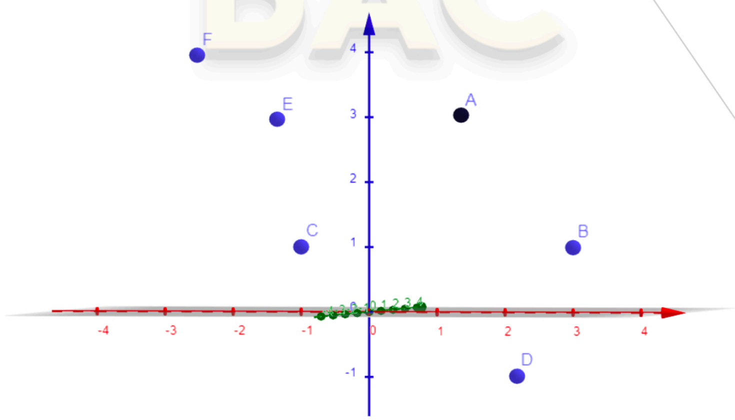


Figure 1 – Placement des 5 points dans l'espace

Affirmation 1

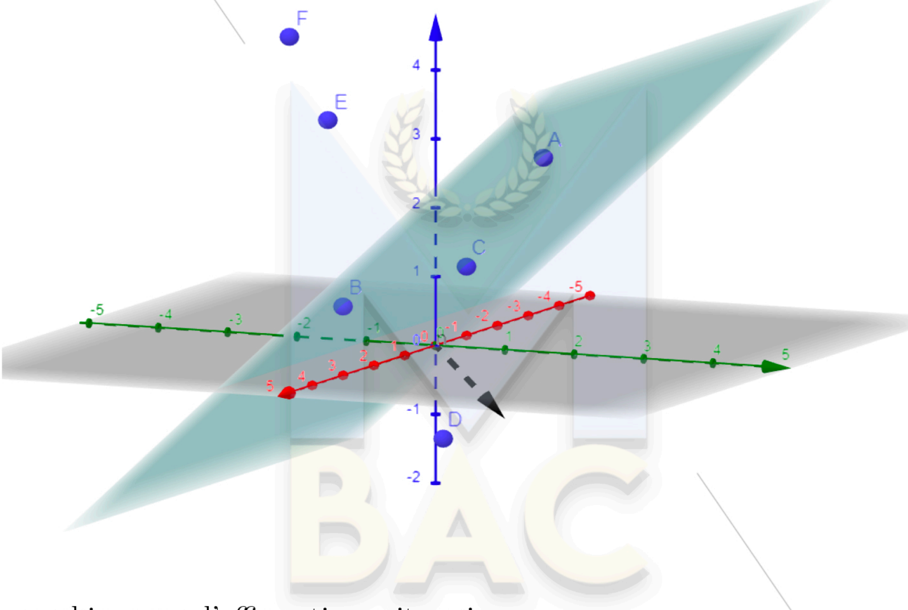
Il est évident sur le schéma que l'affirmation est fausse.
Démontrons le.

> *Méthodologie :* pour montrer que 3 points ne sont pas alignés, il suffit de calculer deux vecteurs et de montrer qu'ils sont non colinéaires.

On a $\overrightarrow{AB} = (2; -2; -2)$.
On a $\overrightarrow{AC} = (-2; -2; -2)$.

Puisque les 2 vecteurs ne sont pas colinéaires, les 3 points ne peuvent pas être alignés, par conséquent, l'affirmation est **fausse**.

Affirmation 2



Il semble sur le graphique que l'affirmation soit vraie.

> *Méthodologie :* Pour montrer qu'un vecteur est orthogonal à un plan, on montre que ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan.

Calculons $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 - 2 + 2 = 0$.
Puis $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 - 2 + 2 = 0$.

D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont non coliénaires.

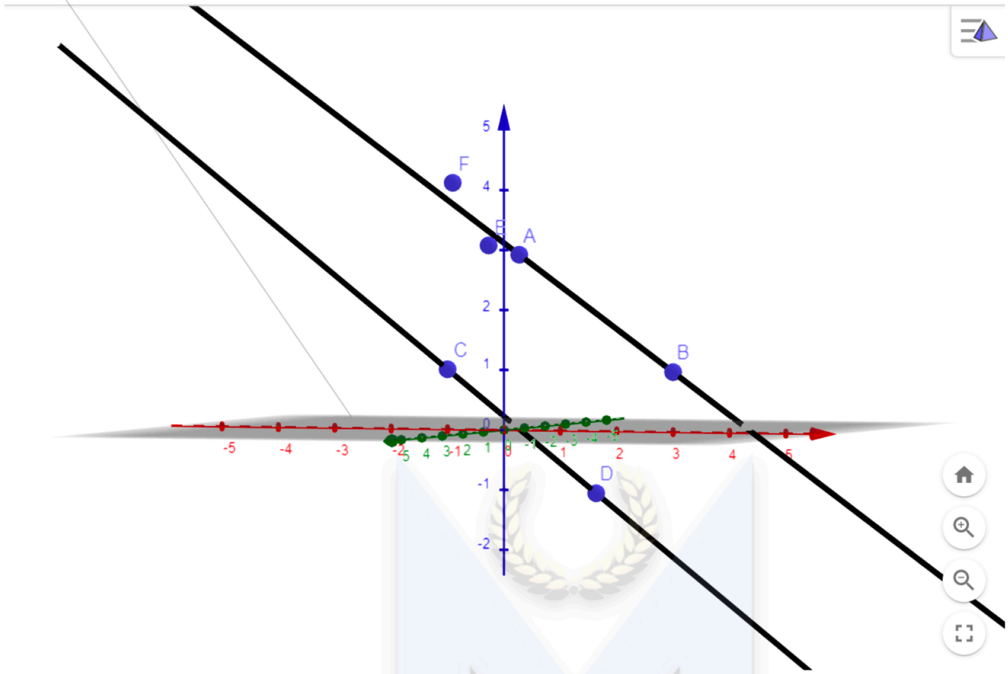
Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonale à 2 vecteurs non colinéaires du plan, par conséquent on en déduit que $\vec{n}$ est orthogonale au plan (ABC).

L'affirmation 2 est donc **vraie**.

On a donc prouvé que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants. Leur intersection est le milieu du segment $[BC]$.

L'affirmation 3 est donc **vraie**.

Affirmation 4



D'après le schéma, l'affirmation semble fausse.

Méthodologie : Cette méthode consiste à trouver une représentation paramétrique pour chacune des droites. Puis à regarder s'il existe une solution au système d'équations.

La droite (AB) passe par le point A, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, et a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique est donc :

$$\begin{array}{c} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 2t \end{array}$$

La droite (CD) passe par le point C, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique est donc :

$$\begin{array}{c} x = -1 + 3t \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t \end{array}$$

Si les deux droites sont sécantes, alors il existe un point qui appartient aux deux droites, et qui par conséquent vérifie les 2 systèmes d'équations.

$$\begin{aligned}1+2t&=-1+3t'\\2-2t&=t'\\3-2t&=t'\end{aligned}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases}2t-3t'=-2\\2t+t'=2\\2t+t'=3\end{cases}$$

Il est évident en regardant les lignes 2 et 3 que ce système n'a pas de solution. Les 2 droites ne sont donc pas sécantes.

L'affirmation 4 est **fausse.**

Exercice 3

Notions abordées : fonction logarithme, étude de fonction, limites, sens de variation, algorithmique, étude d'une suite.

1. On cherche à résoudre $f(x)=x$, c'est à dire $x-ln(x^2+1)=x$.
Ce qui revient à $ln(x^2+1)=0$.
On sait que $ln(y)=0$ implique que $y=1$.
On a donc $x^2+1=1$.
Finalement $x=0$.

2. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que somme et composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}$$

On résout $f'(x)=0$.
C'est à dire $1-\dfrac{2x}{x^2+1}=0$

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^2+1}&=1\\2x&=x^2+1\end{aligned}$$

On trouve donc une équation du second degré $x^2-2x+1=0$.

On commence par calculer son delta : $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4=0$.
La seule racine est donc $x=\dfrac{-b}{2a}=1$.
Cela nous dit également que $\forall x\in\mathbb{R},f'(x)\geq 0$.

Calcul de la limite en $-\infty$.
On a $\lim_{x\to-\infty}x^2+1=+\infty$.
Et $\lim_{x\to+\infty}\ln X=+\infty$.
Par composition de limites, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)=+\infty$.

De plus, $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$
Et $\lim_{x\to-\infty} -\ln\left(x^2+1\right) = -\infty$
On en déduit que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3. On a $f(0) = 0 - ln(0^2+1) = 0$, et $f(1) = 1 - ln(1^2+1) = 1 - ln(2) \approx 0.31$.
f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On en déduit que $\forall x \in [0;1],\ f(0) \leq f(x) \leq f(1)$.
On en déduit que $\forall x \in [0;1],\ f(x) \in [0;1]$.

4a. Cet algorithme détermine le plus petit entier N tel que $f(N)$ devienne supérieur à une valeur A.

4b. Pour répondre à cette question, le plus simple est de saisir le programme sur sa calculatrice et de le faire tourner pour $A = 100$. On obtient alors comme valeur 110.

Partie B

1. Montrons par récurrence la propriété $P(n)$: "$u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right)$".
Initialisation : on sait que $u_0 = 1$, donc $u_0 \in [0;1]$.
Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit n appartenant à $\mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est verifiée.
Cela signifie que $u_n \in [0;1]$.
On sait que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Or d'après la question 3, $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0;1]$, on en déduit que $f(u_n) \in [0;1]$.
On en déduit donc que $P(n+1)$ est vérifiée.
On a donc prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;1]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$.
Il faut ensuite étudier le signe de cette expression.
D'après la question précédente, on sait que : $0lequnleq1$. Donc $0 \leq u_n^2 \leq 1$
Puis $1 \leq u_n^2 + 1 \leq 2$.
Or la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}$, et $ln(1) = 0$.
On en déduit que $ln(1) \leq ln(u_n^2+1)$.
Donc $0 \leq ln(u_n^2+1)$.

Finalement, $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right) \leq 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, par conséquent elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

4. D'après la question précédente, la suite (u_n) est convergente, notons l sa limite. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut passer à la limite dans cette égalité, on obtient $l = f(l)$. Or d'après la question 1, la seule solution de cette équation est $l = 0$. Par conséquent, on en déduit que la limite de la suite (u_n) est 0.

Exercice 4

Notions abordées : géométrie complexe, fonctions trigonométriques.

1. Les triangles ETA et ETB sont rectangles en E. On peut alors écrire que :

$$\tan(\alpha) = \frac{AE}{ET} = \frac{25}{x}$$

et

$$\tan(\beta) = \frac{EB}{ET} = \frac{30.6}{x}$$

2. Les fonctions *sin* et *cos* sont définies, continues et dérivables sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$. De plus, la fonction *cos* ne s'annule pas sur cet intervalle. On en déduit que la fonction tan est bien définie et dérivable sur cet intervalle.

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}\left[, \tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x(-\cos x)}{(\cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\right.$$

On en déduit que la fonction tangente est donc strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

3. On a

$$\tan(\gamma) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{30.6}{1 + \frac{30.6}{x} \times \frac{25}{x}}$$

Il ne reste qu'à simplifier :

$$\tan(\gamma) = \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}} = \frac{\frac{5,6}{x}}{\frac{x^2 + 765}{x^2}} = \frac{5,6}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + 765} = \frac{5.6x}{x^2 + 765}$$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal lorsque sa mesure γ est maximale. On sait que γ appartient à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$. Puisque la fonction tangente est croissante sur cet intervalle, on en déduit que si γ est maximal alors $\tan(\gamma)$ l'est également.

Etudions donc le sens de variation de $\tan(\gamma) = g(x) = \frac{5.6x}{x^2 + 765}$.

En regardant la forme proposée par l'énoncé, on se rend compte qu'il est sans doute plus simple de partir de l'étude de $\frac{1}{g}$.

Les fonctions g et $\frac{1}{g}$ ont des variations contraires.

On a $f = 5,6\frac{1}{g}$.

Par conséquent, les fonctions f et $\frac{1}{g}$ ont les mêmes variations alors que f et g ont des variations contraires.

La fonction g admet donc un maximum pour une valeur de x pour laquelle f admet un minimum.

Etudions les variations de f.

$$\forall x \in]0; 50], f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2 - 765}{x^2} = \frac{x + \sqrt{765}}{x}(x - \sqrt{765})$$

Le signe de $f'(x)$ est donc déterminé par le terme $(x - \sqrt{765})$.
Le changement de signe se fait pour $(x = \sqrt{765})$.

On en déduit que l'angle $\widehat{ATB}$ est maximal pour $(x = \sqrt{765}) \approx 28m$.

Il ne reste plus qu'à calculer la valeur de l'angle correspondante, celle ci est de 0.1 radian ce qui correspond à 5.78 degrès.